Mateja Zidarić, Sudovec

BROJKO VRAGOLKO[1]

Slika 1.

Robertu je odavno dosadilo sanjati. – *U snovima uvijek ja ispadnem budala* – rekao je sam sebi.

Da je prije sreo Brojka Vragolka, Robert nikada ne bi izgovorio ovakvo što.

Što bi matematika bila kada bi brojevi počeli „hopsati”? (vidi [1]) Što bi matematika bila kada bi učenici naučili „vući hren” ili „hopsati unazad”? (vidi [1]) Sve bi u matematici ostalo isto kao i do sada. Upravo u tome leži ljepota ove znanosti: ne samo u njezinoj estetici ili vrijednosti njezine primjene, nego i u njenoj bezvremenskoj dosljednosti, nepobitnoj istinitosti (naravno, onoga što je dokazano da vrijedi).

Robert, glavni junak priče koju u ovom broju Matke predstavljam kao prijedlog za čitanje, uvijek je bio prosječan učenik. Bilo ga je nemoguće motivirati za proučavanje matematičkog sadržaja. Ipak, za njega postoji mjesto i postoji netko tko će ga uspjeti potaknuti da promišlja o matematičkim problemima – to je Brojko Vragolko. Robert sreće Brojka Vragolka u snovima. U svakome od dvanaest snova, Robert otkriva zanimljiv i neobičan svijet matematike uz novog prijatelja i mentora. Iz noći u noć, sve je više zainteresiran za nova matematička otkrića. Time ruši prepreke koje su ga prethodno sprječavale da i sam postavlja pitanja, a ne samo odgovara na postavljene probleme. Već prve noći otkriva kako pomoću broja 1 možemo „izgraditi” bilo koji prirodan broj (uzastopnim pribrajanjem broja jedan). Uči o diobi žvakaće gume i sljedeće brojeve čita kao (vidi [1]):

$$\frac{1}{1} \text{ – „jedna žvakaća, jedna osoba”}$$

$$\frac{1}{2} \text{ – „jedna žvakaća, dvije osobe”}$$

$$\vdots$$

$$\frac{1}{453} \text{ – „jedna žvakaća, četiri stotine pedeset tri osobe” itd.}$$

– *Pa to ide u nedogled,* primijeti Robert. *Sve dok komadići žvakaće gume ne postanu toliko sitni da ih golim okom ne možeš vidjeti.* [1, str. 20] (U teoriji, na koliko osoba možemo dijeliti tu žvakaću gumu?) Dakle, Robert je u prvoj noći otkrio i razlomke te broj kojemu se razlomci dobiveni na navedeni način „približavaju” (što ćete u srednjoj školi nazivati *limesom*).

[1] Hans Magnus Enzensberger: Brojko Vragolko

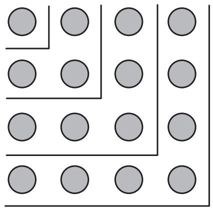
U sljedećoj noći otkriva skup cijelih brojeva. Posebno otkriva značenje *nule* pri uvođenju brojevnog sustava koji danas koristimo. Robert će potenciranje nazivati „hopsanje" (na primjer, $10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^3 = 1\,000$ čita kao „deset hopsa tri puta"). Određivanje drugog korijena nekoga broja nazivat će „vući hren", a pritom će otkriti i nerazumne brojeve (iracionalne brojeve) poput broja $\sqrt{2}$.

O nerazumnim brojevima:

– Postoji ih još mnogo više koji se ponašaju puno prkosnije i koji iza svog zareza potpuno „pošandrcaju". To su nerazumni brojevi. Oni se tako zovu zato što se ne pridržavaju pravila.

– Nemoj se nadati da su nerazumni brojevi rijetkost. Naprotiv, ima ih kao pijeska na moru. Među nama rečeno, ima ih čak više od ostalih. [1, str. 75]

U petome poglavlju (petoj noći), Robert će otkriti trokutaste i kvadratne brojeve. Otkrit će da su razlike između dvaju susjednih trokutastih brojeva jednake uzastopnim prirodnim brojevima, da se svaki prirodan broj može zapisati kao zbroj najviše triju trokutastih brojeva, da je zbroj nekih dvaju uzastopnih trokutastih brojeva jednak kvadratu odgovarajućeg prirodnog broja. U ovom će poglavlju otkriti i *Gaussovu dosjetku* – metodu jednostavnog zbrajanja prvih n prirodnih brojeva. Nakon trokutastih, Robert će analogno promatrati i *kvadratne brojeve*. Otkrit će da je n-ti kvadratni broj jednak zbroju prvih n neparnih prirodnih brojeva. Na slici lijevo vidimo zbroj prvih pet neparnih prirodnih brojeva.



Slika 2.

U sljedeće dvije noći, Robert će otkriti Fibonaccijeve brojeve i njihova svojstva te Pascalov trokut. Promatranjem Pascalovog trokuta primjećuje nizove brojeva poznate iz prijašnjih snova (npr. trokutaste brojeve, Fibonaccijeve brojeve, potencije broja 2).

U osmoj noći, Brojko Vragolko uvodi Roberta u svijet kombinatorike. Robert će na jednostavnim primjerima otkriti primjer permutacije, kombinacije bez ponavljanja i kombinacije n-tog razreda od n elemenata.

U devetoj noći Robert uz pomoć Brojka Vragolka otkriva koliko ima neparnih brojeva, odnosno kako pokazati da postoji beskonačno mnogo i prirodnih i neparnih brojeva. Također će se uvjeriti da Fibonaccijevih brojeva ima beskonačno mnogo.

U desetoj noći, između ostalog, Brojko Vragolko zadaje Robertu da promatra kvocijent dvaju Fibonaccijevih brojeva (pri čemu je veći broj dijeljen manjim). Uočava da se vrijednost tako dobivenog kvocijenta približava broju koji možemo zapisati u obliku verižnog razlomka na sljedeći način:

$$1.618... = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{...}}}}}$$

Taj isti broj (*Zlatni rez*) nalazimo i kao duljinu dijagonale pravilnog peterokuta čija je duljina stranice jednaka jedan.

U posljednje dvije noći otkrit ćete više o procesu dokazivanja matematičkih tvrdnji i o aksiomima.

Robert je u dvanaest snova i druženja s Brojkom Vragolkom uspio ostati zainteresiran za nove matematičke spoznaje. Bio je spreman samostalno istraživati matematiku i rješavati probleme koje do tada nije znao ni mogao riješiti (zbog negativnog stava prema samome predmetu).

Prije svega navedena je knjiga preporuka (kako i podnaslov knjige kaže) za čitanje svima koji se boje matematike. Ovo je jednostavno štivo za sve koji zaziru od matematike, ali znaju da će, ako se usude upoznati matematiku na pravi način, otkriti pravilnosti kojima je moguće opisati svijet koji nas okružuje. Dragi Matkači, pronađite Roberta u sebi i dopustite da vas Brojko Vragolko uvede u svijet matematike.

Uzmete li knjigu u ruke, potrudite se pronaći odgovore na sljedeće „probleme”:

1. Pronađi sve *brojeve – palindrome* navedene u knjizi. Kojom ih je računskom operacijom Brojko Vragolko dobio? Nastavlja li se analogija za brojeve tog oblika? Ako ne, navedite protuprimjer (ako postoji) iz knjige.
2. Što je Rimljane sprječavalo da zapisuju brojeve prema mjesnim vrijednostima? Što nisu poznavali?
3. Kako se zove „trik” pronalaženja prostih brojeva za koji Brojko Vragolko kaže da je *star k'o Grčka*? Primjenjujući taj „trik”, nađite prvih dvadeset prostih brojeva.
4. Koliko iznosi duljina dijagonale jediničnog kvadrata? Dokažite da vaš odgovor vrijedi, ne koristeći se pritom Pitagorinim poučkom.
5. Istražite što je to Gaussova dosjetka. Navedite primjer iz knjige gdje ju Brojko Vragolko primjenjuje.
6. Po kojem se principu razmnožavaju zečevi koje Robert upoznaje u jednome od svojih snova s Brojkom Vargolkom? Kako zovemo brojeve kojima je opisano njihovo razmnožavanje? Koliko će zečjih parova biti nakon šest mjeseci prethodno opisanog razmnožavanja?
7. Izračunajte „4 vumm!”. Kako u matematici pišemo i čitamo „4vumm!”? (poslužite se Kazalom na kraju knjige).
8. Koliko različitih tročlanih grupa možete načiniti od jedanaest osoba? Pri tome odgovoru koristite trokutaste brojeve.
9. Navedite primjer niza brojeva (iz knjige) koji se „približavaju” zlatnome rezu.

Literatura

1. H. M. Enzensberger, *Brojko Vragolko – lagano štivo za sve koji se plaše matematike,* Mozaik knjiga, 2005.

Izvori slika

Slika 1. http://www.knjiga.ba/brojko-vragolko-lagano-stivo-za-sve-koji-se-plase-matematike-n1995.html

Slika 2. http://denisegaskins.com/2008/04/15/answer-figurate-number-puzzles/